



مرکز پیش دبستانی و دبستان
بافرا العلتسوم

به نام خدا

امتحان درس: **جبر و احتمال**

نام و نام خانوادگی:

وقت امتحان: **۱۱۰** دد: **۳۰۱-۹۵۱۰۲۶**

رشته: **ریاضی**

کلاس: **سوم**

دانش آموز عزیز شما می توانید پاسخنامه امتحان را دو ساعت پس از پایان امتحان در پورتال مدرسه ملاحظه نمایید.

www.bagheralolum.sch.ir

حضرت علی (ع): هر کس تحمل رنج آموزش ندارد، در تاریکی جهل بماند

ردیف	سوالات	بارم
۱	الف) تفاوت استدلال استقرایی و استدلال استنتاجی در چیست؟ ب) (اصل لانه کبوتر) و (اصل استقرای ریاضی) را تعریف کنید	۱/۵
۲	کدام یک از عبارات های زیر درست و کدام یک نادرست است؟ برای عبارات های نادرست مثال نقض بیاورید. الف) حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گویاست. ب) مربع هر عدد فرد به اضافه یک، عددی زوج است. پ) برای هر عدد طبیعی n آنگاه $3 + 2^n$ عددی اول است.	۱/۲۵
۳	با استدلال استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید: الف) $(1 + \sqrt{2})^n \geq 1 + n\sqrt{2}$ ب) $P(n): 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	۳
۴	اگر n عدد طبیعی و $(2n+2)$ عددی فرد باشد، با استدلال برهان خلف، نشان دهید که n نیز عددی فرد است.	۱
۵	نشان دهید که اگر هر زیر مجموعه ۶ عضوی از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ را در نظر بگیریم، حداقل دو عضو وجود دارد که مجموع آنها برابر ۱۰ باشد.	۱
۶	به روش بازگشتی ثابت کنید: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$	۱/۵
۷	با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر به مکعب عدد فردی یک واحد اضافه کنیم عدد زوجی به دست می آید.	۱/۵
۸	با ذکر دلیل بنویسید آیا $(4 + 3^n)$ همیشه یک عدد اول است؟	۰/۵
۹	اگر مجموعه $A = \{x, \{x\}, \{x, \{x\}\}\}$ باشد، کدامیک از عبارات زیر درست و کدامیک نادرست است؟ الف) $\{x\} \subseteq A$ ب) $\{\{x\}\} \in A$	۰/۵
۱۰	مجموعه های زیر را به صورت ریاضی (گزاره نما) نشان دهید. $A = \{\dots, 27, 8, 1, 0, -1\}$ و $B = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$	۱
۱۱	اگر $A = [-i, 2-i]$ و $i \in N$ باشد، مطلوب است $\bigcap_{i=1}^4 A_i$ و $\bigcup_{i=1}^4 A_i$	۲

بارم	سوالات	ردیف
۱/۵	<p>الف) تفاوت استدلال استقرایی و استدلال استنتاجی در چیست؟ نتیجه حاصل از استدلال استقرایی بصورت حدس و گمان است اما نتیجه استدلال استنتاجی قطعی است</p> <p>ب) اصل لانه کبوتر) و (اصل استقرای ریاضی) را تعریف کنید</p> <p>اصل لانه کبوتر، اگر m کبوتر بخواهند n لانه را اشغال کنند و $m > n$ باشد، حداقل یک لانه با بیش از یک کبوتر وجود خواهد داشت.</p> <p>اصل استقرای ریاضی، اگر $P(n)$ حکمی در مورد اعداد طبیعی باشد بطوری که اولاً $P(1)$ برقرار باشد و ثانیاً چنانچه $P(k)$ برقرار باشد آنگاه $P(k+1)$ نیز برقرار باشد. در اینصورت $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n برقرار است.</p>	۱
۱/۲۵	<p>کدام یک از عبارات های زیر درست و کدام یک نادرست است ؟ برای عبارات های نادرست مثال نقض بیاورید.</p> <p>الف) حاصل ضرب هر دو عدد گنگ ، عددی گویاست.</p> <p>ب) مربع هر عدد فرد به اضافه یک ، عددی زوج است.</p> <p>پ) برای هر عدد طبیعی n آنگاه $2^n + 3$ عددی اول است.</p> <p>الف) نادرست است زیرا $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ هر دو گنگ هستند اما ضربشان برابر $\sqrt{6}$ است که گنگ است</p> <p>ب) درست است</p> <p>ج) نادرست است زیرا اگر $(n=5)$ باشد داریم $3^5 + 3 = 3^5$ که اول نیست</p>	۲
۳	<p>با استدلال استقرای ریاضی ، برای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید :</p> $P(n): 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{الف)}$ $(1+\sqrt{3})^n \geq 1+n\sqrt{3} \quad \text{ب)}$ <p>$p(1): 1 + \sqrt{3} \geq 1 + \sqrt{3}$ $p(2): (1 + \sqrt{3})^2 \geq 1 + 2\sqrt{3}$</p> <p>$p(k): (1 + \sqrt{3})^k \geq 1 + k\sqrt{3}$</p> <p>$p(k+1): (1 + \sqrt{3})^{k+1} \geq 1 + (k+1)\sqrt{3}$</p> <p>دو طرف فرض را در $1 + \sqrt{3}$ ضرب می کنیم.</p> $(1 + \sqrt{3})^k (1 + \sqrt{3}) \geq (1 + k\sqrt{3})(1 + \sqrt{3})$ $(1 + \sqrt{3})^{k+1} \geq (1 + k\sqrt{3})(1 + \sqrt{3})$ $(1 + k\sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) \geq 1 + (k+1)\sqrt{3}$ <p>باید ثابت کنیم :</p> $\Rightarrow 1 + \sqrt{3} + k\sqrt{3} + 3k \geq 1 + k\sqrt{3} + \sqrt{3} \Rightarrow 3k \geq 0$ <p>بدیهی است</p>	۳

$$P(1): 1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} \Rightarrow 1 = 1$$

$$P(K): 1+2^2+3^2+\dots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

فرض استقراء

$$P(K+1): 1+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

حکم استقراء

$$P(K+1): 1+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

اگر n عدد طبیعی و $(2n+2)$ عددی فرد باشد، با استدلال برهان خلف، نشان دهید که n نیز عددی فرد است.

1) $n=2k \Rightarrow 2(2k)+2=4k+2=2(2k+1)=2A$
خلاف حکم

به خلاف فرض رسیده ایم، پس همان حکم داده شده صحیح است.

نشان دهید که اگر هر زیر مجموعه ۶ عضوی از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ را در نظر بگیریم، حداقل دو عضو وجود دارد که مجموع آنها برابر ۱۰ باشد.

هر مجموعه A که ۶ عضوی انتخاب شود، ۶ عضو = تعداد کبوترها

تعداد حالاتی که ۱۰ ایجاد می شود با استفاده از اعداد تکراری یا اعداد بی تکرار (حالت ۵) یا (حالت ۴) = تعداد لانه ها

$$\{(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6)\} \text{ یا } \{(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5)\}$$

بر طبق اصل لانه کبوتر $6 > 5$ یا $6 > 4$ پس حداقل دو عضو با مجموع ۱۰ وجود دارد

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$$

به روش بازگشتی ثابت کنید:

۱/۵

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2 - 2xy - 2x - 2y \geq 0 \Rightarrow$$

$$(x-1)^2 + (x-y)^2 + (y-1)^2 \geq 0$$

درستی عبارت بدیهی است. بنابراین تمامی روابط برگشت پذیر است.

۶

1/5	<p>با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر به مکعب عدد فردی یک واحد اضافه کنیم عدد زوجی به دست می آید.</p> $x = 2k - 1 \rightarrow x^3 + 1 = (2k - 1)^3 + 1 = 8k^3 - 12k^2 + 6k - 1 + 1 = 2(4k^3 - 6k^2 + 3k) = 2A$ <p>پس زوج است</p>	7
0/5	<p>با ذکر دلیل بنویسید آیا $(4 + 3^n)$ همیشه یک عدد اول است؟ به ازای $(n=4)$ داریم: $4 + 3^4 = 85$ که اول نیست</p>	8
0/5	<p>اگر مجموعه $A = \{x, \{x\}, \{x, \{x\}\}\}$ باشد، کدامیک از عبارات زیر درست و کدامیک نادرست است؟ الف) $\{x\} \subseteq A$ ب) $\{\{x\}\} \in A$ الف: درست است و ب: نادرست است</p>	9
1)	<p>مجموعه های زیر را به صورت ریاضی (گزاره نما) نشان دهید.</p> $A = \{\dots, 27, 8, 1, 0, -1\} \quad \text{و} \quad B = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ $A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}, x \geq -1\}$ <p>حاصلضرب دو ریشه مجموع دو ریشه $S = 0, P = -2 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow B = \{x \mid x^2 - 2 = 0\}$</p>	10
2	<p>اگر $A = [-i, 2-i]$ و $i \in \mathbb{N}$ باشد، مطلوب است $\bigcap_{i=1}^4 A_i$ و $\bigcup_{i=1}^4 A_i$</p> $A_1 = [-1, 1] \quad A_2 = [-2, 0] \quad A_3 = [-3, -1] \quad A_4 = [-4, -2]$ $\bigcup_{i=1}^4 A_i = [-4, 1] \quad \bigcap_{i=1}^4 A_i = \emptyset$	11
1/5	<p>مجموعه های $A = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}, -2 < k < 2\}$ و $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq 4\}$ مفروضند: الف) مجموعه های A, B را با نوشتن عضوها مشخص کنید. ب) اعضای مجموعه $A \Delta B$ را معین کنید.</p> $A = \{-1, 1, 3\} \quad B = \{1, 2\} \quad A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{-1, 3, 2\}$	12
0/25	<p>مقادیر x و y را طوری بیابید که دو زوج مرتب $(x^2 - y^2, 3)$ و $(15, x - y)$ با هم برابر باشند.</p> $\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \Rightarrow (x - y)(x + y) = 15 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow 3(x + y) = 15 \Rightarrow x + y = 5$ $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 4, y = 1$	13

به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

الف) $(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$

ب) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

ج) $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$

د) $A - (A - B) = A \cap B$

الف)

$$(A \cup B) - (B \cup C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)' = (A \cup B) \cap (B' \cap C') = [(A \cup B) \cap B'] \cap C' = [(A \cap B') \cup \phi] \cap C' = (A \cap B') \cap C' = (A - B) - C$$

ب)

۳ $A \subseteq B \Rightarrow (A \cup B) = B \Rightarrow (A \cup B)' = B' \Rightarrow$

$$A' \cap B' = B' \Rightarrow B' \subseteq A'$$

۱۴

ج)

$$[(A - B) \cup (B - A)] \cup (A \cap B) = [(A \cap B') \cup (B \cap A')] \cup (A \cap B) =$$

$$(A \cap B') \cup [(B \cap (A \cup A'))] = (A \cap B') \cup B = (A \cup B) \cap (B \cup B') = (A \cup B)$$

د)

$$A - (A - B) = A - (A \cap B') = A \cap (A \cap B')' = A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$$

